XVIII Olimpíada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Duración: 4 horas
Cada problema vale 7 puntos Marzo 2006
Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de APMO.
Por favor, no publicar ni discutir los problemas en Internet hasta esa fecha.
No se puede usar calculadora.

Problema 1. Sea n un entero positivo. Hallar el mayor número real no negativo $f(n)$ (depende de n) con la siguiente propiedad: siempre que $a_1, a_2, ..., a_n$ sean números reales tales que $a_1 + a_2 + ... + a_n$ es un entero, debe existir un índice i tal que $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq f(n)$.

Problema 2. Demostrar que todo entero positivo se puede escribir como una suma finita de potencias enteras distintas del número de oro $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aquí, una potencia entera de τ es de la forma τ^i, donde i es un entero (no necesariamente positivo).

Problema 3. Sea $p \geq 5$ un número primo y r la cantidad de maneras de colocar p piezas en las casillas de un tablero de $p\times p$ de modo que las piezas no estén todas en una misma fila (pueden estar en una misma columna). Demostrar que r es divisible por p^5. Acá suponemos que las piezas son iguales (indistinguibles) y en cada casilla hay a lo sumo una pieza.

Problema 4. Sean A, B dos puntos distintos en una circunferencia dada O y sea P el punto medio del segmento AB. Sea O_1 una circunferencia tangente a la recta AB en P y tangente a la circunferencia O. Sea ℓ la recta tangente a O_1 que pasa por A, distinta de la recta AB. Sea C el punto de intersección de ℓ y O, distinto de A. Sea Q el punto medio del segmento BC y O_2 la circunferencia tangente a la recta BC en Q y tangente al segmento AC. Demostrar que la circunferencia O_2 es tangente a la circunferencia O.

Problema 5. En un circo hay n payasos que se visten y se pintan utilizando una selección de 12 colores distintos. Cada payaso está obligado a usar al menos cinco colores distintos. Un día, el dueño del circo ordenó que no hubiera dos payasos con exactamente el mismo conjunto de colores y que no hubiera más de 20 payasos que usaran cada color. Hallar el mayor número n de payasos que hacen posible cumplir las órdenes del dueño del circo.